ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

5η ΔΕΚΑΔΑ

41.

Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και τα ενδεχόμενα $A = \{\omega_1, \omega_3\}$, $B = \{\omega_2, \omega_4\}$

Αν είναι $P(A-B) = \dfrac{\nu+1}{\nu+4}$ και $P(B-A) = \dfrac{\nu-1}{2\nu}$, όπου ν θετικός ακέραιος τότε

i) Να αποδείξετε ότι $P(A-B) = P(A)$ και $P(B-A) = P(B)$

ii) Να αποδείξετε ότι $\nu = 4$

iii) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων A και B

iv) Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχόμενου $A' \cup B'$

Προτεινόμενη λύση

i)

Έχουμε ότι $P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$ **(1)**

Όμως $A \cap B = \varnothing \Rightarrow P(A \cap B) = 0$

$(1) \Rightarrow P(A-B) = P(A)$

Και ομοίως $P(B-A) = P(B) - P(A \cap B) =$

$= P(B) - 0 = P(B)$.

ii)

$$P(A) + P(B) = P(\omega_1) + P(\omega_2) + P(\omega_3) + P(\omega_4) = P(\Omega) = 1 \overset{(i)}{\Rightarrow}$$

$$P(A-B) + P(B-A) = 1 \Rightarrow \frac{\nu+1}{\nu+4} + \frac{\nu-1}{2\nu} = 1$$

$$2\nu(\nu+1) + (\nu-1)(\nu+4) = 2\nu(\nu+4)$$

$$\nu^2 - 3\nu - 4 = 0$$

$\nu = 4$ (η $\nu = -1$ απορρίπτεται αφού $\nu > 0$)

iii)

$$P(A) = P(A-B) = \frac{4+1}{4+4} = \frac{5}{8}$$

$$P(B) = P(B-A) = \frac{4-1}{2\cdot 4} = \frac{3}{8}$$

iv)

$$P(A' \cup B') = P(A') + P(B') - P(A' \cap B')$$

$$= P(A') + P(B') - [P(A') - P(A' \cap B)]$$

$$= P(A') + P(B') - P(A') + P(A' \cap B)$$

$$= P(B') + P(B) - P(A \cap B) = 1 + 0 = 1$$

42.

Οι μηνιαίες αποδοχές 200 υπαλλήλων μιας εταιρίας δίνονται στον πίνακα

Μην.αποδοχές σε εκατοντάδες €	Συχνότητα ν_i	Σχτ. συχνότητα f_i%	Αθρ. Σχετ. συχν. F_i%
6	κ		
8			30
9	40		
10			
Σύνολο	200		

Αν η μέση τιμή των αποδοχών είναι $\bar{x}$ = 900 €

i) Να βρείτε το κ

ii) Να βρείτε την διασπορά της κατανομής

iii) Να βρείτε πόσοι υπάλληλοι έχουν μισθό πάνω από 800 €

iv) Αν από τους παραπάνω υπαλλήλους οι 60 είναι γυναίκες με μέσο μισθό 800 €, να βρείτε την μέση τιμή του μισθού των ανδρών

v) Αν από τους παραπάνω υπαλλήλους επιλέξουμε έναν στην τύχη , να βρείτε την πιθανότητα να έχει αποδοχές 600 ή 1000 €

Προτεινόμενη λύση

i)

$$f_3 = \frac{40}{200} = 0{,}2 = 20\%$$

$$F_3 = F_2 + f_3 = 30 + 20 = 50\%$$

Όμως $F_4 = 100 \Leftrightarrow$

$$F_3 + f_4 = 100$$
$$50 + f_4 = 100$$
$$f_4 = 50\%$$

Επομένως $\nu_4 = 100$.

$$\kappa + \nu_2 + 40 + 100 = 200 \Leftrightarrow \nu_2 = 60 - \kappa \quad \textbf{(1)}$$

Ακόμα

$$\bar{x} = \frac{6\cdot\kappa + 8\cdot(60-\kappa) + 9\cdot 40 + 10\cdot 100}{200} \Leftrightarrow 9 = \frac{1840 - 2\kappa}{200} \Leftrightarrow \kappa = 20$$

$$(1) \Leftrightarrow \nu_2 = 60 - 20 \Leftrightarrow \nu_2 = 40$$

ii)

$$S^2 = \frac{20\cdot(6-9)^2 + 40\cdot(8-9)^2 + 40\cdot(9-9)^2 + 100\cdot(10-9)^2}{200} = \frac{8}{5}$$

iii)

40 + 100 = 140

iv)

Αν $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{140}$ είναι οι μισθοί των ανδρών και
$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{60}$ οι μισθοί των γυναικών ,

τότε $$\bar{x} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{140} + \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_{60}}{200} \Leftrightarrow$$

$$9 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{140} + \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_{60}}{200} \qquad \textbf{(2)}$$

και $\quad \overline{x}_\gamma = \dfrac{\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_{60}}{60} \quad \Leftrightarrow$

$$8 = \frac{\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_{60}}{60}$$

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_{60} = 480$$

(2) $\quad \Rightarrow \quad 9 = \dfrac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{140} + 480}{200}$

$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{140} = 1320$, οπότε $\quad \overline{x}_\alpha = \dfrac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{140}}{140}$

$$= \frac{1320}{140} = 9{,}43$$

Άρα ο μέσος μισθός των ανδρών είναι 943 ευρώ

v)

Η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\frac{20}{200} + \frac{100}{200} = \frac{120}{200} = 0,6 = 60\%$$

43.

Α.

Έστω ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω με $P(A)=\frac{1}{2}$ και $P(B)=\frac{2}{3}$.

i) Δείξτε ότι $\frac{1}{6} \le P(A\cap B) \le \frac{1}{2}$

ii) Να βρείτε την μέγιστη τιμή της πιθανότητας $P(A\cap B')$

iii) Αν είναι $P[(A\cap B')]=\frac{1}{6}$, να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχόμενου Γ "Ένα ακριβώς από τα Α , Β πραγματοποιείται"

Β.

Αν οι τιμές $P(A)$, $P(B)$, $P(\Gamma)$, $P(A\cap B)$, $P(A\cup B)$, $P(\Omega)$, $P(\varnothing)$ των ενδεχομένων του παραπάνω δειγματικού χώρου Ω είναι οι τιμές μιας μεταβλητής X, να βρείτε

i) Τη μέση τιμή αυτών

ii) Τη διάμεσο και το εύρος των τιμών της X

Προτεινόμενη λύση

Α.

i)

Για την ανίσωση $P(A\cap B) \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow P(A\cap B)\le P(A)$ ισχύει αφού $(A\cap B)\subseteq A$

Για την ανίσωση $\frac{1}{6} \le P(A\cap B) \Leftrightarrow \frac{1}{6} \le P(A)+P(B)-P(A\cup B)$

$$\frac{1}{6} \le \frac{1}{2}+\frac{2}{3}-P(A\cup B)$$

$$P(A\cup B) \le \frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{6}$$

$P(A\cup B) \le 1$ η οποία είναι προφανής

ii)

$$P(A\cap B') = P(A)-P(A\cap B) = \frac{1}{2}-P(A\cap B)$$

Είναι φανερό ότι $P(A\cap B')=\max$ όταν $P(A\cap B)=\min$,

δηλαδή $P(A\cap B')=\max$ όταν $P(A\cap B)=\frac{1}{6}$

Τότε $P(A\cap B') = \frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}=\max$

iii)

$$P(\Gamma) = P[(A-B)\cup(B-A)] = P(A)+P(B)-2P(A\cap B) \quad \textbf{(1)}$$

Όμως $P[(A\cap B')]=\frac{1}{6} \Leftrightarrow P(A)-P(A\cap B)=\frac{1}{6}$

$$\frac{1}{2} - P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{3}$$

$$(1) \quad \Rightarrow \quad P(\Gamma) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

Β.

Είδαμε ότι $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{2}{3}$, $P(\Gamma) = \frac{1}{2}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$

Ακόμα είναι $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

και $P(\Omega) = 1$, $P(\varnothing) = 0$

i)

$$\overline{x} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{5}{6} + 1 + 0}{7} = \frac{23}{42}$$

ii)

Οι παραπάνω τιμές σε αύξουσα σειρά είναι : $0, \ \frac{1}{3}, \ \frac{1}{2}, \ \frac{1}{2}, \ \frac{2}{3}, \ \frac{5}{6}, \ 1$

Άρα $\delta = 4^{\eta}$ παρατήρηση $= \frac{1}{2}$ και εύρος $R = 1 - 0 = 1$

44.

Έστω η συνάρτηση $f(t) = 2t + \mu$, όπου $\mu \in \mathbb{R}$. Μια επιχείρηση έχει έσοδα $E(t)$, σε εκατομμύρια ευρώ που δίνονται από τον τύπο $E(t) = (t-1)f(t)$, $t \geq 0$ όπου t συμβολίζει το χρόνο σε έτη . Το κόστος λειτουργίας $K(t)$ σε εκατομμύρια ευρώ δίνεται από τον τύπο $K(t) = f(t+4)$, $t \geq 0$.

i) Να βρείτε τη συνάρτηση του κέρδους $P(t)$, όταν ξέρουμε ότι η επιχείρηση , κατά το πρώτο έτος της λειτουργίας της, είχε ζημιά 12 εκατομμύρια ευρώ.

ii) Ποια χρονική στιγμή η επιχείρηση θα αρχίσει να παρουσιάζει κέρδη;

iii) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης κέρδους στο τέλος του δεύτερου χρόνου λειτουργίας.

Προτεινόμενη λύση

i)

Είναι γνωστό ότι κέρδος = έσοδα – έξοδα

$$\begin{aligned} P(t) &= E(t) - K(t) \\ &= (t-1)f(t) - f(t+4) \\ &= (t-1)(2t+\mu) - 2(t+4) - \mu \\ &= 2t^2 + (\mu-4)t - 8 - 2\mu \quad \textbf{(1)} \end{aligned}$$

$P(1) = -12 \iff 2 + (\mu-4) - 8 - 2\mu = -12 \iff \mu = 2$

Η (1) γίνεται $P(t) = 2t^2 - 2t - 12$

ii)

Για να έχει κέρδη η επιχείρηση θα πρέπει $P(t) > 0 \iff 2t^2 - 2t - 12 > 0$

$$t^2 - t - 6 > 0$$

$$t > 3$$

Επομένως, η επιχείρηση θα αρχίσει να έχει κέρδη μετά το $3^{ο}$ έτος λειτουργίας της

iii)

$P'(t) = 4t - 2 \Rightarrow P'(2) = 4 \cdot 2 - 2 = 6$ εκατομμύρια ευρώ

45.

Έστω A και B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω και ρ ένας πραγματικός αριθμός με $0 < \rho < 1$. Δίνεται ότι οι πιθανότητες $P(A)$, $P(A \cup B)$ και $P(A \cap B)$ είναι ανά δύο διαφορετικές μεταξύ τους και αποτελούν στοιχεία του συνόλου $\{ \rho - 1, \ \rho, \ \rho + 1, \ \rho^2, \ \rho^3 \}$

A.

Να αποδείξετε ότι

i) $P(A) = \rho^2$, $P(A \cup B) = \rho$ και $P(A \cap B) = \rho^3$

ii) $P(B) = \rho^3 - \rho^2 + \rho$

iii) $P(A - B) < P(B - A)$

B.

Αν οι τιμές $P(A)$, $P(B)$, $P(\Omega)$, $P(\varnothing)$, $P(A \cup B)$, $P(A \cap B)$ είναι τιμές μιας μεταβλητής X

i) Να βρείτε συναρτήσει του ρ τη μέση τιμή αυτών

ii) Να εξετάσετε την $\bar{x}(\rho)$ ως προς ην μονοτονία

iii) Αν δ η διάμεσος και R το εύρος, να αποδείξετε ότι $2\delta + R > P(A \cap B)$

Προτεινόμενη λύση

A.

i)

Επειδή $(A \cap B) \subseteq A \subseteq (A \cup B)$, θα είναι $P(A \cap B) \le P(A) \le P(A \cup B)$

Αφού γνωρίζουμε ότι οι πιθανότητες αυτές είναι διαφορετικές μεταξύ τους θα είναι

$$P(A \cap B) < P(A) < P(A \cup B) \quad \textbf{(1)}$$

$0 < \rho < 1 \ \Rightarrow \ \rho - 1 < 0$, άρα ο αριθμός $\rho - 1$ δεν εκφράζει πιθανότητα

$0 < \rho < 1 \ \Rightarrow \ \rho + 1 > 1$, άρα ο αριθμός $\rho + 1$ δεν εκφράζει πιθανότητα

$0 < \rho < 1 \ \Rightarrow \ \rho . \rho < 1 . \rho \ \Rightarrow \ \rho^2 < \rho$ **(2)**

$$(2) \ \Rightarrow \ \rho \rho^2 < \rho \rho \ \Rightarrow \ \rho^3 < \rho^2 \quad \textbf{(3)}$$

Από (2) και (3) έχουμε $\rho^3 < \rho^2 < \rho$

Οπότε, λόγω της (1) θα είναι $P(A \cap B) = \rho^3$, $P(A) = \rho^2$, $P(A \cup B) = \rho$.

ii)

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \ \Leftrightarrow \ \rho = \rho^2 + P(B) - \rho^3 \qquad P(B) = \rho^3 - \rho^2 + \rho$

iii)

$P(A - B) < P(B - A) \ \Leftrightarrow \quad P(A) - P(A \cap B) < P(B) - P(A \cap B)$

$P(A) < P(B)$

$\rho^2 < \rho^3 - \rho^2 + \rho$

$\rho^3 - 2\rho^2 + \rho > 0$

$\rho(\rho^2 - 2\rho + 1) > 0$

$\rho(\rho - 1)^2 > 0$ η οποία ισχύει αφού $0 < \rho < 1$

B.

i)

$$\bar{x} = \frac{P(A) + P(B) + P(\Omega) + P(\varnothing) + P(A \cup B) + P(A \cap B)}{6}$$

$$= \frac{\rho^2 + \rho^3 - \rho^2 + \rho + 1 + 0 + \rho + \rho^3}{6} = \frac{2\rho^3 + 2\rho + 1}{6}$$

ii)

$$(\overline{x}(\rho))' = \frac{6\rho^2 + 2}{6} > 0$$, άρα η $\overline{x}(\rho)$ είναι γνησίως αύξουσα

iii)

Οι παραπάνω τιμές σε αύξουσα σειρά είναι $0,\quad \rho^3,\quad \rho^2,\quad \rho^3 - \rho^2 + \rho,\quad \rho,\quad 1$

Η διάμεσος δ είναι $$\delta = \frac{3^{\eta}\ \pi\alpha\rho\alpha\tau + 4^{\eta}\ \pi\alpha\rho\alpha\tau}{2}$$

$$= \frac{\rho^2 + \rho^3 - \rho^2 + \rho}{2} = \frac{\rho^3 + \rho}{2}$$

Και το εύρος R είναι $R = 1 - 0 = 1$

$$2\delta + R > P(A \cap B) \quad \Leftrightarrow \quad 2\cdot\frac{\rho^3 + \rho}{2} + 1 > \rho^3 \quad \Leftrightarrow$$

$\rho + 1 > 0$, η οποία ισχύει , αφού $0 < \rho < 1$

46.

Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = 4(x-1)(x^2-5x+6),\quad x\in\mathbb{R}$

$g(x) = x^2 + (\kappa^2-5\kappa)x + 13\,,\quad x\in\mathbb{R}$

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^4-5x^3+6x^2}{x^3+2x} & \text{αν } x\neq 0 \\ \lambda^2-3\lambda+2 & \text{αν } x=0 \end{cases}$$

όπου κ και λ πραγματικοί αριθμοί.

Ο δειγματικός χώρος Ω ενός πειράματος τύχης είναι $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$

Έστω $\omega_1= x_1,\quad \omega_2 = x_2,\quad \omega_3 = x_3,\quad \omega_4 = 4x_1,\quad \omega_5 = 4x_2,\quad \omega_6 = 4x_3$

όπου $x_1,\ x_2,\ x_3$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$.

Για τις πιθανότητες των στοιχειωδών ενδεχομένων ισχύει :

$P(\omega_6) = P(\omega_5) = P(\omega_4) = 3P(\omega_3) = 3P(\omega_2) = 3P(\omega_1)$.

i) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των στοιχειωδών ενδεχομένων.

ii) Θεωρούμε τα ενδεχόμενα

$B =\{ \lambda\in\Omega$ / η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $x_o= 0\}$

$\Gamma=\{ \kappa\in\Omega$ / η συνάρτηση g παρουσιάζει ακρότατο στο $x_o=3\}$

Να δείξετε ότι $P(\Gamma) = P(B)$.

iii) Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων $B\cap\Gamma$, $B\cup\Gamma$.

Προτεινόμενη λύση

i)

$f(x) = 0 \iff 4(x-1)(x^2-5x+6) = 0$

$x-1= 0$ ή $x^2-5x+6 = 0$

$x = 1$ ή $x = 2$ ή $x = 3$

Οπότε , αν $\omega_1= 1,\quad \omega_2 = 2,\quad \omega_3 = 3$ τότε $\omega_4 = 4,\quad \omega_5 = 8,\quad \omega_6 = 12$

Επομένως $\Omega = \{ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 8,\ 12\}$

$P(\Omega) = P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(8) + P(12)$ **(1)**

Από την υπόθεση έστω $P(\omega_6) = P(\omega_5) = P(\omega_4) = 3P(\omega_3) = 3P(\omega_2) = 3P(\omega_1) = \mu$

Τότε $P(\omega_1) = P(\omega_3) = P(\omega_2) = \dfrac{\mu}{3}$ και $P(\omega_6) = P(\omega_5) = P(\omega_4) = \mu$

Η (1) γίνεται $1 = \dfrac{\mu}{3}+\dfrac{\mu}{3}+\dfrac{\mu}{3}+\mu+\mu+\mu \iff \mu = \dfrac{1}{4}$

Επομένως $P(1) = P(2) = P(3) = \dfrac{\frac{1}{4}}{3} = \dfrac{1}{12}$ και $P(4) = P(8) = P(12) = \dfrac{1}{4}$

ii)

Για να είναι η h συνεχής στο $x_o = 0$ πρέπει $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = h(0)$ **(2)**

Αλλά $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4-5x^3+6x^2}{x^3+2x} = \left(\dfrac{0}{0}\right)$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x(x^3-5x^2+6x)}{x(x^2+2)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^3-5x^2+6x}{x^2+2} = 0$$

Η (2) γίνεται $0 = \lambda^2 - 3\lambda + 2 \Leftrightarrow \lambda = 1$ ή $\lambda = 2$

Άρα $B = \{1, 2\}$

Είναι $g'(x) = 2x + \kappa^2 - 5\kappa$

Αφού η g παρουσιάζει ακρότατο στο $x_o = 3$, θα είναι $g'(3) = 0$

$\kappa^2 - 5\kappa + 6 = 0$

$\kappa = 2$ ή $\kappa = 3$

Άρα $\Gamma = \{2, 3\}$

$P(B) = P(1) + P(2) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$

$P(\Gamma) = P(2) + P(3) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$

Άρα $P(B) = P(\Gamma)$

iii)

$B \cap \Gamma = \{2\}$ και $B \cup \Gamma = \{1, 2, 3\}$, άρα $P(B \cap \Gamma) = P(2) = \frac{1}{12}$

και $P(B \cup \Gamma) = P(1) + P(2) + P(3)$

$= \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$.

47.

Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = xe + e^x$,

$g(x) = e^{ημx} + ημ^2x + ex - 1$

$h(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 10}$

i) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στην C_g στο σημείο $A(0,\ g(0))$

ii) Να βρείτε την εφαπτομένη στην C_f η οποία είναι παράλληλη στην εφαπτομένη στην C_g στο $A(0,\ g(0))$.

iii) Να βρείτε σημείο της C_h το οποίο είναι πλησιέστερα στο A

iv) Να λύσετε την εξίσωση $4λ^2 f''(1) + λf'(1) - f(1) = 0$

v) Αν 2011 σημεία της εφαπτομένης του (ii) έχουν μέση τιμή τεταγμένων 6 , να βρείτε την μέση τιμή των τετμημένων των σημείων αυτών

Προτεινόμενη λύση

i)

$g(0) = e^{ημ0} + ημ^2 0 + e{\cdot}0 - 1 = e^0 + 0 + 0 - 1 = 1 - 1 = 0$

$g'(x) = συνx\, e^{ημx} + 2ημxσυνx + e \quad \Rightarrow \quad g'(0) = συν0\, e^{ημ0} + 2ημ0συν0 + e$

$= 1\, e^0 + 0 + e = 1 + e$

Η εφαπτομένη της C_g στο $A(0,\ g(0))$ έχει εξίσωση $y - g(0) = g'(0)(x - 0)$

$y - 0 = (1 + e)\, x$

$y = (1 + e)\, x$

ii)

Αν $B(x_o, f(x_o))$ είναι το σημείο επαφής τότε πρέπει $f'(x_o) = 1 + e$ **(1)**

Αλλά $f'(x) = e + e^x$, άρα $f'(x_o) = e + e^{x_o}$

Η (1) γίνεται $e + e^{x_o} = 1 + e$

$e^{x_o} = 1$

$x_o = 0$

Η ζητούμενη εξίσωση είναι $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$

$y - 1 = (1 + e)\, x$

$y = (1 + e)x + 1$

iii)

Το A έχει συντεταγμένες $A(0,\ 0)$

Αν $M(x,\ h(x))$ είναι το ζητούμενο σημείο τότε

$MA = \sqrt{(x-0)^2 + (h(x)-0)^2} = \sqrt{x^2 + x^2 + 4x + 10} = \sqrt{2x^2 + 4x + 10}$

Έτσι ορίζεται η συνάρτηση $φ(x) = \sqrt{2x^2 + 4x + 10}$ της οποίας αναζητάμε το min

$$\varphi'(x) = \frac{4x+4}{2\sqrt{2x^2+4x+10}} = \frac{x+2}{\sqrt{2x^2+4x+10}}$$

$\varphi'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2$

Πρόσημο της φ΄ και μονοτονία της φ

x	$-\infty$ -2 $+\infty$
φ΄	$-$ 0 $+$
φ	$\searrow$ | $\nearrow$

Η συνάρτηση φ παρουσιάζει ελάχιστο για $x = -2$ το $\varphi(-2) = \sqrt{10}$

Το ζητούμενο σημείο Μ είναι το $M(-2, h(-2)) = M(-2, \sqrt{6})$

iv)

$f(x) = xe + e^x$, $f'(x) = e + e^x$ και $f''(x) = e^x$

με $f(1) = 2e$, $f'(1) = 2e$ και $f''(1) = e$

Οπότε $4\lambda^2 f''(1) + \lambda f'(1) - f(1) = 0 \quad \Leftrightarrow$

$4e\lambda^2 + 2e\lambda - 2e = 0$

$2\lambda^2 + \lambda - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = -1$ ή $\lambda = \dfrac{1}{2}$

v)

Γνωρίζουμε ότι $y = (1 + e)x + 1$

Αν $K(x_i, y_i)$ είναι τυχαίο σημείο της εφαπτομένης τότε $y_i = (1 + e)x_i + 1$

Οπότε, αν $\bar{x}$ και $\bar{y}$ είναι οι μέσες τιμές των τετμημένων x και τεταγμένων y των 2011 σημείων, τότε $\bar{y} = (1 + e)\,\bar{x} + 1 \quad \Leftrightarrow$

$6 = (1 + e)\,\bar{x} + 1$

$\bar{x} = \dfrac{5}{1+e}$

48.

Σ' ένα χωριό υπάρχουν ν άνθρωποι με ηλικίες x_1, x_2,.., $x_ν$.έτη .
Το δείγμα των ηλικιών έχει συντελεστή μεταβολής 20% και γίνεται για πρώτη φορά ομοιογενές μετά από 25 έτη .

Α.

Να βρείτε

i) Τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση του δείγματος

ii) Τη μέση τιμή των x_1^2, x_2^2, … , $x_ν^2$.

iii) Αν ο μικρότερος σε ηλικία είναι 10 ετών να βρείτε προσεγγιστικά τη μεγαλύτερη ηλικία , δεχόμενοι ότι η κατανομή είναι περίπου κανονική.

Β.

Στο παραπάνω χωριό υπάρχουν μόνο δύο καφενεία Α και Β . Το 30% των κατοίκων πηγαίνει στο Α , το 60% δεν πηγαίνει στο Β , ενώ το 50% πηγαίνει σε ένα τουλάχιστον καφενείο . Να βρείτε

i) Τι ποσοστό των κατοίκων πηγαίνει και στα δύο καφενεία ;

ii) Από αυτούς που πηγαίνουν μόνο στο ένα καφενείο, ποιοι είναι οι περισσότεροι, αυτοί που πηγαίνουν μόνο στο Α ή αυτοί που πηγαίνουν μόνο στο Β ;

Γ.

Το κάθε ένα από τα ν άτομα αγοράζει ένα λαχείο . Οι λαχνοί είναι αριθμημένοι από το 1 έως το ν. Αν η πιθανότητα να κληρωθεί περιττός είναι κατά 0,8 % μεγαλύτερη από το να κληρωθεί άρτιος , να βρείτε πόσα άτομα έχει το χωριό .

Προτεινόμενη λύση

Α

i)

Αν $\bar{x}$ είναι η σημερινή μέση τιμή και S_x η τυπική απόκλιση τότε

$$CV_x = \frac{S_x}{\bar{x}} \Leftrightarrow 0{,}2 = \frac{S_x}{\bar{x}} \quad \textbf{(1)}$$

Αν x_i μια σημερινή ηλικία, μετά από 25 χρόνια αυτή θα είναι $y_i = x_i + 25$

Τότε $\bar{y} = \bar{x} + 25$ και $S_y = S_x$

Επειδή το δείγμα γίνεται ομοιογενές μετά από 25 χρόνια θα έχουμε $CV_y = 0{,}1$

$$\frac{S_y}{\bar{y}} = 0{,}1$$

$$\frac{S_x}{\bar{x}+25} = 0{,}1 \quad \textbf{(2)}$$

Λύνοντας το σύστημα των (1) και (2) βρίσκουμε $\bar{x} = 25$ και $S_x = 5$

ii)

$$S^2 = \frac{1}{ν}\left\{\sum_{i=1}^{ν} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{ν} x_i\right)^2}{ν}\right\} = \frac{1}{ν}\sum_{i=1}^{ν} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{ν} x_i\right)^2}{ν^2}$$

$$= \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 - \left(\frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i}{\nu}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 - \overline{x}^2$$

Επομένως $\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 = S^2 + \overline{x}^2 \Leftrightarrow \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 = 25 + 625 = 650$

iii)

Αφού η κατανομή είναι κανονική, έχουμε εύρος $R \approx 6S = 30$
οπότε η μεγαλύτερη ηλικία θα είναι περίπου 40 έτη

Β.

Έστω τα ενδεχόμενα Α "το άτομο πηγαίνει στο καφενείο Α"
Β "το άτομο πηγαίνει στο καφενείο Β"

Τότε $A \cup B$ είναι το ενδεχόμενο "το άτομο πηγαίνει σε ένα τουλάχιστον καφενείο"
$A \cap B$ είναι το ενδεχόμενο "το άτομο πηγαίνει και στα δύο καφενεία"

Η υπόθεση γίνεται $P(A) = 30\%$, $P(B') = 60\%$, $P(A \cup B) = 50\%$

i)

$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = P(A) + 1 - P(B') - P(A \cup B) = 20\%$

ii)

$A - B$ είναι το ενδεχόμενο "το άτομο πηγαίνει μόνο στο Α"
$B - A$ είναι το ενδεχόμενο "το άτομο πηγαίνει μόνο στο Β"

Τότε $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = 30\% - 20\% = 10\%$
$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = 40\% - 20\% = 20\%$

Από τα παραπάνω φαίνεται ότι ποιο πολλοί πηγαίνουν στο Β καφενείο

Γ.

Αφού η πιθανότητα να κληρωθεί περιττός αριθμός είναι μεγαλύτερη από την πιθανότητα να κληρωθεί άρτιος και τα στοιχειώδη ενδεχόμενα είναι προφανώς ισοπίθανα , αυτό σημαίνει ότι οι περιττοί είναι περισσότεροι από τους άρτιους
Άρα το πλήθος ν είναι περιττός επομένως το $\nu - 1$ είναι άρτιος

Από το 1 έως και τον άρτιο αριθμό $\nu - 1$ υπάρχουν $\frac{\nu-1}{2}$ άρτιοι και $\frac{\nu-1}{2}$ περιττοί
τελικά στο σύνολο των λαχνών

Οι άρτιοι λαχνοί είναι $\frac{\nu-1}{2}$ και οι περιττοί $\frac{\nu-1}{2} + 1$

Η πιθανότητα να κληρωθεί περιττός (π) λαχνός είναι $P(\pi) = \frac{\frac{\nu-1}{2}+1}{\nu} = \frac{\nu+1}{2\nu}$

Η πιθανότητα να κληρωθεί άρτιος (α) λαχνός είναι $P(\alpha) = \frac{\frac{\nu-1}{2}}{\nu} = \frac{\nu-1}{2\nu}$

Επειδή $P(\pi) = P(\alpha) + \frac{0,8}{100} \Leftrightarrow \frac{\nu+1}{2\nu} = \frac{\nu-1}{2\nu} + 0,008 \Leftrightarrow \nu = 125$

49.

Έστω $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης .
Για τις πιθανότητες των απλών ενδεχομένων λ του Ω ισχύει

$$P(\lambda) = \frac{\lambda+1}{6\lambda}, \ \lambda = 1, 2, 3$$

i) Να βρείτε την πιθανότητα P(0)

ii) Έστω $f(x) = \dfrac{x^2}{e^x}$ και A , B δύο ενδεχόμενα του Ω τέτοια ώστε

$$A = \left\{ \lambda \in \Omega \ / \ \lim_{x\to 1} \frac{e^x f(x-1)}{2x^2 - x - 1} = 3\lambda - \lambda^2 \right\}$$

$$B = \left\{ \lambda \in \Omega \ / \ \text{η κλίση της } C_f \text{ στο } x = 1 \text{ είναι ίση με } \frac{\lambda^2 - 4\lambda + 6}{2e} \right\}$$

Να βρείτε τις πιθανότητες P(A) , P(B) και $P(A \cup B)$

iii) Να εξετάσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα

iv) Αν μία μεταβλητή έχει σαν τιμές τις f(2) , f(3), f(4) , f(5) και f(6) , να βρείτε το εύρος και την διάμεσο αυτών των τιμών

Προτεινόμενη λύση

i)

$$P(\Omega) = P(0) + P(1) + P(2) + P(3) \iff 1 = P(0) + \frac{1+1}{6\cdot 1} + \frac{2+1}{6\cdot 2} + \frac{3+1}{6\cdot 3}$$

$$1 = P(0) + \frac{2}{6} + \frac{3}{12} + \frac{4}{18}$$

$$P(0) = \frac{7}{36}$$

ii)

$$\lim_{x\to 1} \frac{e^x f(x-1)}{2x^2 - x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{e^x \dfrac{(x-1)^2}{e^{x-1}}}{2x^2 - x - 1}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{e(x-1)^2}{2x^2 - x - 1} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{e(x-1)^2}{(2x+1)(x-1)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{e(x-1)}{(2x+1)} = 0$$

Άρα $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^x f(x-1)}{2x^2 - x - 1} = 3\lambda - \lambda^2 \iff 0 = \lambda(3-\lambda) \iff \lambda = 0$ ή $\lambda = 3$

Οπότε $A = \{0, 3\}$.

$$f'(x) = \frac{2xe^x - x^2 e^x}{e^{2x}} \Rightarrow f'(1) = \frac{2\cdot 1e^1 - 1^2 e^1}{e^{2\cdot 1}} = \frac{e}{e^2} = \frac{1}{e}$$

$f'(1) = \frac{1}{e} \quad \Leftrightarrow \quad f'(1) = \frac{\lambda^2 - 4\lambda + 6}{2e}$

$\frac{1}{e} = \frac{\lambda^2 - 4\lambda + 6}{2e}$

$\lambda^2 - 4\lambda + 6 = 2$

$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 2$

Άρα $B = \{2\}$

$P(A) = P(0) + P(3) = \frac{7}{36} + \frac{4}{18} = \frac{15}{36}$

$P(B) = P(2) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

$A \cup B = \{0, 2, 3\}$, άρα $P(A \cup B) = P(0) + P(2) + P(3) = \frac{15}{36} + \frac{1}{4} = \frac{24}{36}$

iii)

$f'(x) = \frac{2xe^x - x^2e^x}{e^{2x}} = \frac{2x - x^2}{e^x}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x - x^2}{e^x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x - x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$ ή $x = 2$

Πρόσημο της f ΄ και μονοτονία της f

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f ΄		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

τ. ελάχιστο για $x = 0$, το $f(0) = 0$

τ. μέγιστο για $x = 2$, το $f(2) = \frac{4}{e^2}$

iv)

Επειδή στο διάστημα $[2, +\infty)$ η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα, οι τιμές $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$ και $f(6)$ σε αύξουσα σειρά είναι $f(6)$, $f(5)$, $f(4)$, $f(3)$, $f(2)$

Οπότε το εύρος R είναι : $R = f(2) - f(6) = \frac{4}{e^2} - \frac{36}{e^6} = \frac{4e^4 - 36}{e^6}$

Και η διάμεσος δ είναι η μεσαία παρατήρηση δηλαδή $\delta = f(4) = \frac{16}{e^4}$

50.

x_i	N_i
-9	4
-8	16
-7	25
-5	50
Σύνολο	

Τα αποτελέσματα της μελέτης ενός δείγματος φαίνονται στον πίνακα

i) Να βρείτε τη διάμεσο της κατανομής

ii) Αν οι τιμές ακολουθούν την κανονική κατανομή με συντελεστή μεταβολής 25% , να βρείτε την τυπική απόκλιση

iii) Οι τιμές αναγράφονται πάνω σε 50 μπάλες. Επιλέγουμε μία μπάλα στην τύχη . Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχόμενου Α "ο αριθμός της μπάλας δεν είναι -7"

iv) Αν $f(x) = \kappa x^4 + (2\kappa+1)x - \frac{1}{2}$ να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχόμενων

α) $B = \{ \kappa \in \Omega \ / \ f'(-1) = 15 \}$ και

β) πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα Α και Β

iv) Για $\kappa = -7$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία $y + 13x = 3$

Προτεινόμενη λύση

Συμπληρώνουμε τον πίνακα με στήλες ν_i , f_i , $\nu_i x_i$

x_i	N_i	ν_i	f_i	$\nu_i x_i$
-9	4	4	0,08	-36
-8	16	12	0,24	-96
-7	25	9	0,18	-63
-5	50	25	0,50	-125
Σύνολο	……	50	1,00	-320

i)

$$\delta = \frac{25^{\eta}\,\pi\alpha\rho\alpha\tau\eta\rho + 26^{\eta}\,\pi\alpha\rho\alpha\tau\eta\rho}{2} = \frac{-7-5}{2} = -6$$

ii)

$$\bar{x} = \frac{1}{\nu}\sum \nu_i x_i = \frac{-320}{50} = -6{,}4$$

$$CV = 25\% \iff \frac{S}{|\bar{x}|} = 0{,}25 \iff \frac{S}{6{,}4} = 0{,}25 \iff S = 1{,}6$$

iii)

$$N(\Omega) = 50\,,\quad N(A') = 9\,,\quad \text{οπότε}\quad P(A') = \frac{N(A')}{N(\Omega)} = \frac{9}{50}$$

$$P(A) = 1 - P(A') = \frac{41}{50}$$

iv)

$$f'(x) = 4\kappa x^3 + (2\kappa + 1) \Rightarrow f'(-1) = 4\kappa(-1)^3 + (2\kappa+1) = -2\kappa + 1$$

$$f'(-1) = 15 \iff -2\kappa + 1 = 15 \iff \kappa = -7$$

α) $B = A' \Rightarrow P(B) = P(A') = \frac{9}{50}$

β) $P(A \cup B) = P(A \cup A') = P(\Omega) = 1$

ν)

$y + 13x = 3 \quad \Leftrightarrow \quad y = -13x + 3$ με $\lambda = -13$

Αν $(x_o, f(x_o))$ είναι το σημείο επαφής τότε πρέπει $f'(x_o) = -13$

$$-28x_o^3 - 13 = -13$$

$$x_o = 0$$

Επομένως το σημείο επαφής είναι το $(0, f(0)) = \left(0, -\frac{1}{2}\right)$

Και η εξίσωση της εφαπτομένης σ' αυτό $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$

$$y = -13x - \frac{1}{2}$$